円環及び2円孔を有する無限板の接触問題に関する理論的研究

著者	杉浦 勝男
号	447
発行年	1979
URL	http://hdl.handle.net/10097/11396

氏　　　　　名	杉(すぎ)　浦(うら)　勝(かつ)　男(お)
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和 54 年7 月 4 日
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 2 項
最　終　学　歴	昭和 36 年3 月 福島大学学芸学部中学校教育養成課程数学科卒業
学位論文題目	**円環及び2円孔を有する無限板の接触問題に関する理論的研究**
論文審査委員	東北大学教授 玉手　統　東北大学教授 斎藤　秀雄 東北大学教授 渥美　光　東北大学教授 八巻　昇 東北大学教授 阿部　博之

論　文　内　容　要　旨

第1章　序　　論

弾性体を剛体あるいは弾性体で圧縮するとき，接触面近傍の応力を求める問題が接触問題である。例えば，歯車の歯の噛み合いや，球軸受の内外論と球，車輪とブレーキなどの機械要素間の力の伝達は，その要素表面の接触を介して行なわれるものであり，これらの機械要素の強度設計には接触表面では変位が，それ以外の表面では外力が与えられている場合の弾性問題いわゆる弾性接触問題を解くことが要請される。この種の平面接触問題は実用上重要であると同時に二次元弾性問題の中の混合境界値問題として理論的にも興味ある問題である。しかし変位が与えられている境界と表面力が与えられている境界との接続点が解の特異点となるため解決がきわめて困難であり厳密な理論解析がなされず，強度設計の隘路となっていた。

この種の問題が複素関数とその解析接続の利用によりHilbert 問題に変換され，かつその解がCauchy 積分に関するPlemely の定理を適用することによって得られ，また，このようにして得られた解が接触端の応力集中の様相を的確に把握できることがMuskhelishvili によって明らかにされてから，この方法に基づく数多くの研究が特にソ連でなされ，その成果はMuskhelishviliの著書等の中にみられる。他にも数多くの研究を挙げることができるが，これらの研究の多くは弾性体の占める領域が半無限板，円孔を有する無限板，中実円板などの単連結領域を扱ったもので

ある。一方多連結領域に関する平面接触問題は近年，1円孔を有する半無限板や円環について若干の研究がなされているのみである。

多くの円孔を有する無限板の問題は実用面からも重要であり，特に2円孔を有する無限板に関してはすでにいくつかの研究がなされている。しかしこれらは，境界上の一部で変位境界条件，残りの部分で応力境界条件を与えるという混合境界値問題ではない。

以上の点を考慮し，本報告では多連結領域である円環と2円孔を有する無限板に対する接触問題すなわち混合境界値問題についてMuskhelishvili の方法を拡張適用して理論的検討を行なったものである。

第2章　円環の弾性接触問題

本章では同心円環の外周上の直径の両端に相対して配置された2個の等しい幅の剛体接触子によって弾性円環が圧縮される場合を取り上げ複素応力関数を用いて解析を行なった。接触子の底の形状は円環の外周と同じ半径の円弧とし，接触弧上で円環と接触子の相対すべりや分離はないものとする。また接触部以外の円環外周および円環内周には外圧は働かないものとする。従って，この問題の境界条件は外周は混合型，内周は応力型である。

次のような方法により前記円環に対する解を導いた。まず円板の占める領域において定義された複素応力関数を自由円弧縁を通して解析接続する方法を用いて円環外周半径と等しい半径を持つ中実弾性円板が問題の接触子によって圧縮される場合の複素応力関数を求めた。次に，円環内周の境界条件を用いて上記応力関数に含まれる未知係数を決定する条件式を導いた。このようにし得られた解は接触端近傍における応力の特異性の解明に都合がよい。

なお，円環内外径比，接触子幅の種々の値について数値計算を行なって円環内外周に沿う応力分布を明らかにし，また接触子の近寄り量と接触子幅，円環内外径比の関係を示した。

第3章　円環の弾性接触問題
（内外縁に接触子のある場合）

本章では均質等方弾性円環の外縁および内縁に相対して配置された接触子によって円環が圧縮される場合について複素応力関数を用いて解析を行なった。前章で取り上げた問題は円環外周には混合型の境界条件，内周には応力型の境界条件を与えているが，ここでは円環内外周とも混合型の境界条件である。

解析にあたっては，円環領域を中実円形領域と，円孔を有する無限領域との共通領域と考え，まず円環外周半径と等しい半径をもつ中実円板の外周に円環外周と同じ境界条件を与えた場合の複素応力関数を求める。次に，円環内周半径と等しい半径の円孔を持つ無限板の孔縁に円環内周と同一の境界条件を与えたときの無限板に対する応力関数を導く。これらの応力関数はそれぞれの問題をHilbert 問題に変換することによって容易に求められた。また，これら2組の応力関数がその共通領域である円環領域で一致すれば，これらはいずれも前記の円環の境界値問題の解となることは明らかである。この一致の条件から各応力関数に含まれる未知係数を決定する条件式

を導いた。このようにして得られた2組の解のうち，前者は円環外縁における応力と変位の特異性をよく表わし，後者は円環内縁における応力，変位の特異性の解明に便利である。これらの応力関数を用い円環の内外縁に沿う応力分布を明らかにした。

第4章　内縁の一部を剛体でささえられた重い弾性円環

本章では物体力として重力が作用する弾性円環の混合境界値問題の解析を行なった。すなわち内縁の一部が剛体支持体によって支えられた重い弾性同心円環が自重によって変形するとき円環内に生ずる応力分布を複素応力関数を用いて明らかにした。剛体支持体の底の形状は円環内縁と同一半径を有する円弧とし，この接触弧上では円環と支持体の相対すべりや分離はないものとする。また，接触縁以外の円環周縁には外力は働かないものとする。

解法としては重力場におかれた1円孔を有する無限板に対する解を利用し，円環外縁の境界条件を満足させる方法により円環に対する解を得た。すなわち，複素応力関数を用い重力が存在する場合の基礎式を導き問題の境界条件を非斉次のHilbert問題に変換し，次いでCauchy積分の境界値に関するPlemelyの定理を利用して，このHilbert問題を解く方法を採用した。

第5章　重い弾性円環の混合境界値問題
（外縁で2個の剛体支持体によってささえられる）

物体力が作用する場合の混合境界値問題として前章では1個の剛体接触子によって内縁の一部がささえられた重い弾性円環を取扱ったが，本章ではさらに進んで，外縁の一部を二つの剛体支持体によってささえられ，自重によって変形する円環に生ずる応力分布を明らかにした。支持体1個の場合に比べ支持体2個の場合には応力関数を決定する条件のひとつとして支持体の間の相対変位を規定する場合と支持合力を規定する場合が考えられる。物体力が作用する場合の場の基礎方程式は非斉次であり，前章の解法では物体力がポテンシャルVを持つことに着目して$\nabla^2 Q=V$を満足する実関数Qを導入したが，このため円環外部への複素応力関数の定義拡張が複雑であった。本章では重力場に対する基礎方程式の特解が比較的簡単な形で求められることに着目して重ね合せの原理を適用した。すなわち非斉次の場の方程式の一般解は物体力を含む非斉次方程式の特解 $\sigma_x^{(o)}$，$\sigma_y^{(o)}$，$\tau_{xy}^{(o)}$，$u_x^{(o)}$，$u_y^{(o)}$ と物体力を含まない斉次方程式の一般解 $\sigma_x^{(m)}$，$\sigma_y^{(m)}$，$\tau_{xy}^{(m)}$，$u_x^{(m)}$，$u_y^{(m)}$ の和で表わされる。これらの特解は境界条件と無関係に求められるが，斉次方程式の一般解は円環に与えられた境界条件を満足するように決定されなければならない。この斉次方程式を解くためにMuskhelishvili の手法を採用したが，円環外周の外部領域への複素応力関数の解析接続が前章の場合より容易であった。

第6章　2円孔を有する無限板の混合境界値問題
（1円孔が一様内圧を受ける場合）

本章では2円孔を有する弾性無限板の混合境界値問題として相異なる大きさの2円孔を有する無限板が1円孔内には一様内圧を受け，他の円孔縁の一部が2個の剛体接触子によって圧せられ

る場合について解析を行なった。解析にあたっては1円孔を有する無限板に対する解の応用も考えられるが，解法が複雑となるだけであり，また両円孔が接近している場合の解の収束性にも問題が残るのでこの場合には必ずしも妥当でない。ここでは問題の取扱いを容易にするため一次変換を用い2円孔を有する無限領域を有限な同心円環領域に写像する。この操作により問題を円環領域での複素関数に対するHilbert問題におきかえることができる。このHilbert 問題の解はさきに円環の混合境界値問題を解く場合に行なった要領で得ることができる。なおこのようにして得られた解は接触端の応力集中を的確に把握できると共に，2円孔の位置関係の板内応力分布への影響をみることができる。数値計算を行ない，接触子の幅，円孔間の中心距離および各円孔の半径を変えて，それぞれの場合について円孔縁に沿った応力を明らかにした。

第7章　2円孔を有する無限板の混合境界値問題
（1円孔内に介在物が存在する場合）

本章では弾性係数の異なる円形介在物が完全接着されている無限板内にさらに1円孔があり，その円孔縁の一部が2個の剛体接触子によって押しつけられる場合この円形介在物が円孔縁の応力にいかなる影響を与えるかを明らかにした。解析にあたってはこの複合弾性体の接触問題を2円孔を有する無限板の問題として扱い，前章と同様写像関数により母材の占める2円孔を有する無限領域と介在物の占める円形領域を同心円環および円領域に写像する。このことにより，問題は有限領域での混合境界値問題となり，Hilbert 問題への変換によって解くことができる。またこの解に含まれる未知係数は母材と円形介在物の接着縁における応力と変位の連続性から決定される。このようにして得られた解は接触端における応力の特異性と円形介在物の円孔縁の応力に対する影響を明らかにするのに好適であった。

第8章　結　　論

結論として本論文を要約し，第2章から第7章までの総括を行なった。

終りにのぞみ終始懇切なご指導，ご鞭撻を賜りました東北大学工学部玉手　統教授に厚く感謝の意を表します。また本研究にあたり有益なご助言を賜りました東北大学工学部斎藤秀雄教授，渥美　光教授，高速力学研究所八巻　昇教授，東北大学工学部阿部博之教授ならびに東北大学工学部機械工学科内力及び弾性学研究室の各位に深く感謝の意を表します。

審　査　結　果　の　要　旨

車輪とブレーキ，玉軸受，歯車など機械要素間の力の伝達がその表面の接触を介して行われる要素の強度設計には接触面近傍の応力分布を求める弾性接触問題の解明が要請される。弾性接触問題は，接触面で変位，他の表面で表面力が与えられる混合境界値問題であり，理論的にも興味あるものである。複素応力関数の解析接続の利用により平面接触問題がヒルベルト問題に変換され，その解がコーシー積分の境界値に関する定理を適用して導かれることが明らかにされてから，この方法に基づく多くの研究がみられるが，弾性体の占める領域が単連結の場合が多く，実際上重要な多連結領域の例は極めて少ない。

本論文は，多連結領域がいくつかの単連結領域の共通域であることに注目して，多連結領域に属する円環及び2円孔を有する無限板の接触問題の解析法について行った研究を纏めたもので，8章からなる。

第1章は序論である。第2章は円環外周上に相対して配置された2個の剛体接触子による同心円環の圧縮問題に関するもので，外周の境界条件は混合型，内周は応力型である。円板領域で定義された複素応力関数を自由円弧縁を介して円の外部領域に解析接続することにより，中実円板の圧縮問題の応力関数を求める。このとき円の中心が円環の外部にあることに留意して，上記応力関数が円の中心に極をもつものとし，その強さを調整して円環内周の応力型境界条件を満たしている。巧みな解法である。円環内応力及び円環のバネ係数に関する形状因子の効果について得られた知見は実用上有用である。

第3章は，同心円環の接触問題であるが内外周の境界条件はともに混合型である。円環領域が中実円領域と円孔を有する無限領域の共通域であることに着目し，第2章の解法により各単連領域の混合境界値問題の複素応力関数を求める。次いで共通域で2組の応力関数が一致するように各応力関数に含まれる極の強さを調整して解を決定している。この着想は適切であり，その応用範囲も広い。

第4章と第5章は内縁または外縁の一部を剛体で支持され，自重で変形する円環に関するものである。第4章の解法は応力関数の定義拡張が複雑となるが，取扱いは直線的であり，第5章の解法は重ね合せを用いるため応用関数の解析接続の容易な点で優れている。第6章と第7章は2円孔を有する無限板に関するもので，一円孔縁は混合型境界条件，他の円孔縁は第6章では応力型，第7章では異質介在物との連続の条件を与えている。一次変換により物理面の領域を写像面の円環領域に移し，問題を円環領域での複素関数のヒルベルト問題に書換える解法を示している。

第8章は結論である。

以上要するに，本論文は円環及び2円孔を有する無限板の二次元弾性接触問題に対する独自の解法を開発したもので，種々の複雑な問題に適用してその有効性を示すとともに，強度設計上重要な知見を多数提供しており，弾性学ならびに機械工学に寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。